

## Chương 1. Giới hạn và liên tục

### Bài 1. Tính giới hạn

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 5} - x)$

2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 5x - 1} - \sqrt{x^2 + 3x + 3})$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

4.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x - 2}$

5.  $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\cot \pi x}$

6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right)$

7.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + 1}}$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \arctan(1+x) - \pi}{x}$

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2x^2} - \cos x}{x^2}$

10.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 + 1}{3x^2 + 5} \right)^{2x^2 + x}$

11.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4 + \cos x}}{x^2}$

12.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2 \arctan x}{\pi} \right)^x$

13.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}$

14.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{1/x^2}$

15.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{\pi}{4} - \arctan \frac{x}{x+1} \right)$

16.  $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - \cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

17.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan 2x}$

18.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\pi - 2 \arctan x)$

19.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sqrt{1 + 2x} - e^x}$

20.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 + x^2}{x \tan x}$

21.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$

22.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{1 + 5x} - (1 + x)}$

23.  $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \tan \frac{\pi x}{2}$

24.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} \right)^{\sin x}$

25.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$

### Bài 2. Xét tính liên tục

1.  $f(x) = \begin{cases} \sin x \ln x & \text{với } x > 0 \\ a + x & \text{với } x \leq 0 \end{cases}$

2.  $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{e^{2x} - e^{-x}} & \text{với } x \neq 0 \\ a & \text{với } x = 0 \end{cases}$

3.  $f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{|x|} & \text{với } x \neq 0 \\ a & \text{với } x = 0 \end{cases}$

4.  $f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1) \sin \frac{\pi}{x-1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ a & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$

5.  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - 1}{x} & \text{nếu } x > 0 \\ a + x^2 & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$

6.  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x) - x}{2x^2} & \text{nếu } x > 0 \\ a & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$

7.  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x} & \text{nếu } x > 0 \\ a & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$

8.  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{\sin x}}{x - \pi} & \text{nếu } x > \pi \\ a + x^2 & \text{nếu } x \leq \pi \end{cases}$

## Chương 2. Tích phân

### Bài 1. Tích phân bất định

1.  $\int \frac{x + x^3}{1 + x^2 - x^4} dx$

2.  $\int \frac{x^6}{x^2 + x - 2} dx$

3.  $\int \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2(x-1)} dx$

4.  $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx$

5.  $\int \frac{2x}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$

6.  $\int \frac{x}{x^8 - 1} dx$

7.  $\int \frac{x}{x^3 - 1} dx$

8.  $\int \frac{x \cdot dx}{x^3 - 3x + 2}$
9.  $\int \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} \cdot dx$
10.  $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$
11.  $\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2+3x+3}}$
12.  $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+2x-5}}$
13.  $\int \frac{x \cdot \arctan x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot dx$
14.  $\int \frac{x \ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} \cdot dx$
15.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$
16.  $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}$
17.  $\int \frac{\arctan e^x}{e^x} dx$
18.  $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}$
19.  $\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx$
20.  $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$
21.  $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx$
22.  $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx$
23.  $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$
24.  $\int \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$
25.  $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$
26.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$
27.  $\int \frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos 2x} dx$
28.  $\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2}$
29.  $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{1+x}}$
30.  $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$

31.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos x}$

32.  $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^3 x}$

## Bài 2. Tích phân xác định

1.  $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx$
2.  $\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx$
3.  $\int_0^a \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}}$
4.  $\int_0^3 \frac{dx}{(3+x^2)^{\frac{5}{2}}}$
5.  $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{5x+1}} \cdot dx$
6.  $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2-1}}$
7.  $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x + e^{-x}}} dx$
8.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx$
9.  $\int_{\pi}^{5\pi/4} \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \cdot dx$
10.  $\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \cdot dx$
11.  $\int_1^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx$

## Chương 3. Hàm nhiều biến

### Bài 1. Tính đạo hàm riêng

- (1)  $z = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$

- (2)  $z = \ln \tan \frac{x}{y}$

- (3)  $f(x, y, z) = \arctan \frac{y}{xz}$

- (4)  $z = \ln(u^2 + v^2)$ ,  $u = xy$ ,  $v = e^{x+y}$

- (5) Cho  $z = \ln(3x + 2y - 1)$ ,  $x = e^t$ ,  $y = \sin t$ . Tính  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ,  $\frac{dz}{dt}$ .

- (6) Cho  $u = \sin x + f(\sin y - \sin x)$ ,  $f$  là hàm khả vi. Chứng minh rằng:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \cos x + \frac{\partial u}{\partial x} \cos y = \cos x \cos y.$$

(7) Cho  $z = f(xy + y^2)$ ,  $f$  là hàm khả vi. Rút gọn biểu thức

$$A = (x + 2y) \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}$$

(8) Cho  $u = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{z}\right)$ ,  $f$  là hàm khả vi. Rút gọn biểu thức

$$B = x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z}$$

(9) Tính  $z'_x(0, 0)$ ,  $z'_y(0, 0)$  với  $z = \sqrt[3]{xy}$

## Bài 2. Đạo hàm của hàm ẩn

(1) Tính  $y'(x)$ ,  $y''(x)$  biết  $y = y(x)$  là hàm ẩn xác định bởi phương trình

$$\ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arctan \frac{y}{x}$$

(2) Tính  $z'_x$ ,  $z'_y$  và  $dz$  biết  $z = z(x, y)$  là hàm ẩn xác định bởi

(a)  $\arctg z + z^2 = e^{xy}$

(b)  $z - ye^{x/z} = 0$

(c)  $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1$

(d)  $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

(3) Tính  $y'(x)$ ,  $z'(x)$  biết  $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$  xác định bởi

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^3 = 4 \end{cases}$$

(4) Tính  $u'_x$ ,  $u'_y$  biết  $u = x^2 + y^2 + xyz$  và  $z = z(x, y)$  xác định bởi

$$ze^z = ye^x + xe^y.$$

## Bài 3. Đạo hàm và vi phân cấp cao

(1) Cho  $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Chứng minh rằng:

$$u''_{x^2} + u''_{y^2} + u''_{z^2} = \frac{2}{u}$$

(2) Tính  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(\frac{1}{2}, 1\right)$  biết  $u(x, y) = x + (y - 1) \arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)$

(3) Tính  $z''_{xy}$  biết hàm ẩn  $z = z(x, y)$  xác định bởi

$$3x + 2y + z = e^{-x-y-z}$$

(4) Tìm  $d^2z$  biết:

(a)  $z = x^2 \ln(x + y)$

(b)  $z = \arctan \frac{y}{x}$

## Bài 4. Dùng vi phân tính gần đúng

1.  $A = \sqrt{1,98^4 + 3,03^2}$

2.  $B = \ln(\sqrt{1,03} + \sqrt[3]{0,99} - 1)$

3.  $C = \arctan \frac{1 + 0,02^3}{0,99^2}$

4.  $D = \sqrt{(1,04)^{1,99} + \ln(1,02)}$

## Bài 5. Cực trị của hàm nhiều biến

1. Tìm cực trị các hàm sau:

(a)  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$

(b)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 15xy$ .

(c)  $f(x, y) = xy + 1000\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$

(d)  $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$

(e)  $f(x, y) = x + 2y$  với điều kiện  $x^2 + y^2 = 5$

(f)  $f(x, y) = x^2 + y^2$  với điều kiện  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

(g)  $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  với điều kiện  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$

(h)  $f(x, y) = xy$  với điều kiện  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$

2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

(a)  $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + x - y$ , trên miền đóng  $D$  giới hạn bởi các đường  $x = 1$ ,  $y = 1$ ,  $x + y = 1$ .

(b)  $f(x, y) = x^2 - y^2$  trên miền  $D = \{x^2 + y^2 \leq 9\}$

(c)  $f(x, y) = xy$  trên miền  $D = \left\{\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} \leq 1\right\}$

(d)  $z = 1 + xy - x - y$ , trên miền đóng  $D$  giới hạn bởi  $y = x^2$  và  $y = 1$

## Chương 4. Phương trình vi phân

### Bài 1. Giải phương trình vi phân cấp 1

1.  $(x + y)dx + (x - y)dy = 0$ ;  $y(0) = 0$ .

2.  $y' - 2xy = 3x^3y^2$

3.  $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$

4.  $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}$

5.  $y' = (x + y + 1)^2$

6.  $xy' - y + x \cos \frac{y}{x} = 0$

7.  $y' + 2y = y^2 e^x$

8.  $(1 + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$

9.  $xy' + y = y^2 \ln x$ ;  $y(1) = 1$

## Chương 5. Phương trình sai phân

### Bài 1. Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng

10.  $ydx - (x^2y^2 + x)dy = 0$
11.  $xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x}$
12.  $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$
13.  $y' \cos y + \sin y = x$
14.  $y' = \frac{3x^2 - xy - y^2}{x^2}$
15.  $(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0$
16.  $(x^2 + y)dx = xdy$
17.  $(y + \ln x)dx - xdy = 0$
18.  $x\sqrt{1 - y^2}dx + y\sqrt{1 - x^2}dy = 0$
19.  $y' = \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x}$
20.  $y' = x^2 + xy + \frac{y^2}{4} - 1$

### Bài 2. Phương trình vi phân cấp 2

1. Giải các phương trình vi phân cấp 2 giảm cấp:

- (a)  $(1 + x^2)y'' + 1 = 0$
- (b)  $y'' = \frac{y'}{x} + x^2$
- (c)  $(1 - x^2)y'' - xy' = 2, y(0) = 0, y'(0) = 0$
- (d)  $(y')^2 + 2yy'' = 0$

2. Giải các phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính:

- (a)  $y'' - 2y' + y = 2e^{2x}$ .
- (b)  $y'' - 6y' + 9y = \cos 3x$ .
- (c)  $2y'' + 3y' + y = xe^{-x}$
- (d)  $y'' + 2y' + 2y = x^2 - 4x + 3$
- (e)  $y'' - 4y' = 4x^2 + 3x + 2; y(0) = 0, y'(0) = 2$
- (f)  $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}, y(2) = y'(2) = 0$
- (g)  $4y'' - 4y' + y = xe^{\frac{1}{2}x}$
- (h)  $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x$ .
- (i)  $y'' + 9y = \cos 3x + e^x$
- (j)  $y'' + y = 4xe^x$
- (k)  $y'' + y = 6 \sin x$
- (l)  $y'' - 2y' + y = xe^x$
- (m)  $y'' - 4y' = x^2 + 2x + 3$
- (n)  $y'' - 2y' = 2 \cos^2 x$

1.  $5y_{n+2} + 6y_{n+1} - 11y_n = 2n - 1$
2.  $5y_{n+2} - 6y_{n+1} + 5y_n = 3^n$
3.  $5y_{n+2} - 6y_{n+1} + 5y_n = n^2 + 1$
4.  $y_{n+2} + y_n = 2^n$
5.  $y_{n+2} + 5y_n = 5n^2 - 2n - 1$
6.  $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 2^{-2n}$
7.  $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = n + 5$
8.  $y_{n+2} = 5y_{n+1} - 6y_n + n^2$
9.  $y_{n+2} = 4y_{n+1} - 5y_n + 3n^2$
10.  $y_{n+2} = 3y_{n+1} - 4y_n + 3n^2 + 2$
11.  $y_{n+2} + y_n = n + 1$
12.  $y_{n+2} + y_n = 3, y_0 = 0, y_1 = 1$
13.  $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 2n + 1, y_0 = 0, y_1 = 1$
14.  $y_{n+2} - y_n = 0, y_0 = 0, y_1 = 1$
15.  $y_{n+2} + y_n = 2^n, y_0 = 0, y_1 = 1$
16.  $x_{n+2} - 8x_{n+1} + 16x_n = 6(n + 1)4^{n+2}$
17.  $x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = -4 + (5n + 7) \cdot 2^n + 4 \cdot 3^{n+1}$

### Bài 2. Hệ phương trình sai phân tuyến tính cấp 1

1.  $\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 2y_n \end{cases}, x_0 = 2, y_0 = -1$
2.  $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - 8y_n \\ y_{n+1} = 2x_n - 6y_n \end{cases}, x_0 = -1, y_0 = 2$
3.  $\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n - y_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}, x_0 = -1, y_0 = -5$
4.  $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - 3y_n \\ y_{n+1} = 3x_n - 4y_n \end{cases}, x_0 = -1, y_0 = 1$
5.  $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = -x_n + y_n \end{cases}, x_0 = 0, y_0 = 1$
6.  $\begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 6y_n \\ y_{n+1} = x_n - y_n \end{cases}$