PHÂN HIỆU ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI TẠI TP. HỒ CHÍ MINH

CÔNG THỨC KUNNETH TRONG PHẠM TRÙ ABEN

Nguyễn Thị Thái Hà

Ngày 31 tháng 10 năm 2020

Lời giới thiệu

Trong nhiều tài liệu như *Basis Homological Algebra (M.Scott Osbrone), Homology theory (James W. Vick)...* công thức Kunneth được chứng minh trực tiếp cho hàm tử Tenxơ và hàm tử Hom.

Hoặc trong *Homological Algebra (Henri Cartan và Samuel Eilenberg)* công thức Kunneth được chứng minh cho một hàm tử cộng tính bất kì khi xét trong phạm trù môđun trái hoặc phải.

Báo cáo này chứng minh công thức kunneth trong phạm trù aben (đối số là các vật trong phạm trù). Bố cục gồm 2 phần:
Phần 1: Hàm tử cộng tính và Hàm tử dẫn suất
Phần 2: Công thức Kunneth

Phần 1: Hàm tử cộng tính và Hàm tử dẫn suất

Nội dung chính của phần 1 là Định lí dãy đồng điều khớp và mô tả đồng cấu nối δ_k

Trong phạm trù aben cho dãy khớp ngắn của các phức $0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$. Khi đó dãy vô tận các đồng điều sau là dãy khớp

$$\ldots \longrightarrow H_{i+1}(X'') \xrightarrow{\delta_{i+1}} H_i(X') \longrightarrow H_i(X) \longrightarrow H_i(X'')$$

$$\xrightarrow{\delta_i} H_{i-1}(X') \longrightarrow H_{i-1}(X) \longrightarrow H_{i-1}(X'') \longrightarrow \ldots$$

Định nghĩa Hàm tử cộng tính

Cho $t : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ là một hàm tử của các phạm trù aben.
Hàm tử t được gọi là *hàm tử cộng tính* nếu nó bảo toàn cấu trúc cộng tính của tập hợp các đồng cấu, nghĩa là với hai đồng cấu bất kì $\varphi, \psi : A_1 \longrightarrow A_2$ của $\mathcal{A}$ thì

$$t(\varphi + \psi) = t(\varphi) + t(\psi)$$

Định nghĩa Hàm tử cộng tính

Cho $t : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ là một hàm tử của các phạm trù aben.
Hàm tử t được gọi là *hàm tử cộng tính* nếu nó bảo toàn cấu trúc cộng tính của tập hợp các đồng cấu, nghĩa là với hai đồng cấu bất kì $\varphi, \psi : A_1 \longrightarrow A_2$ của $\mathcal{A}$ thì

$$t(\varphi + \psi) = t(\varphi) + t(\psi)$$

Định nghĩa phần tử của Vật

Cho A là một vật trong phạm trù aben $\mathcal{A}$. *Một phần tử x của A* là một cấu xạ $x : X \longrightarrow A$, kí hiệu $x \in_m A$.

Bổ đề 1

Hàm tử cộng tính $t : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \longrightarrow \mathcal{A}$, hiệp biến theo biến thứ nhất và phản biến theo biến thứ hai, là hàm tử khớp phải nếu và chỉ nếu với mỗi dãy khớp

$$A_1' \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_1'' \longrightarrow 0$$

trong $\mathcal{A}_1$ và

$$0 \longrightarrow A_2' \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_2''$$

trong $\mathcal{A}_2$ thì

$$t(A_1', A_2) \oplus t(A_1, A_2'') \xrightarrow{\varphi} t(A_1, A_2) \longrightarrow t(A_1'', A_2') \longrightarrow 0$$

là dãy khớp với $\varphi = t(A_1' \longrightarrow A_1, A_2 \longrightarrow A_2'')$.

Định nghĩa Phức n - phân bậc

Cho tập hợp n-phân bậc $C = (C_{\bar{i}})$.
các phép lấy vi phân $\partial := \{\partial^{(k)}\}$ trong C là tập hợp của n đồng cấu $\partial^{(k)} : C \longrightarrow C$ có bậc $-\bar{e}_k$ $1 \leq k \leq n$ thoả

$$\partial^{(k)}\partial^{(k')} + \partial^{(k')}\partial^{(k)} = 0$$

$$\partial^{(k)}\partial^{(k)} = 0$$

Khi đó tập hợp n-phân bậc và phép lấy vi phân ∂ được gọi là *phức n-phân bậc* , kí hiệu $C = (C_{\bar{i}}, \partial^{(k)})$ hay $C = (C_{\bar{i}}, \partial)$.

Một phức đơn phân bậc được gọi là *một dãy phức*.

Định nghĩa phức liên kết

Trong phạm trù aben cho phức n-phân bậc $C = (C_{\bar{i}}, \partial)$. Nếu tồn tại các vật

$$\widetilde{C_i} = \sum_{\sigma(\bar{i})=i} C_{\bar{i}} \qquad \forall i \in \mathbb{Z}$$

thì $\widetilde{C_i}$ xác định tập hợp 1-phân bậc trong $\mathcal{A}$
và

$$\widetilde{C} = (\widetilde{C_i}, \widetilde{\partial})$$

với

$$\widetilde{\partial}_i := \partial_{\bar{i}}^{(1)} + ... + \partial_{\bar{i}}^{(n)}$$

là một phức 1- phân bậc. Phức $\widetilde{C}$ được gọi là *phức liên kết* (1-phân bậc) của phức n-phân bậc.

Định nghĩa phép giải xạ ảnh

Trong phạm trù aben cho vật A và dãy phức dương

$$P: \ldots \longrightarrow P_3 \xrightarrow{\partial_3} P_2 \xrightarrow{\partial_2} P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \longrightarrow 0.$$

Đồng cấu $\varepsilon : P_0 \longrightarrow A$ được gọi là *đồng cấu bổ sung* A của dãy phức dương P nếu $\varepsilon\partial_1 = 0$.
Một *phép giải dương* của A là một dãy phức dương P được bổ sung A sao cho dãy

$$\ldots \longrightarrow P_3 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

khớp.
Nếu $\forall k, P_k$ xạ ảnh thì P được gọi là *phép giải xạ ảnh*.

Định nghĩa đồng cấu trên f.

Cho A, A' là các vật trong phạm trù aben, đồng cấu $f : A \longrightarrow A'$ và X, X' tương ứng là các dãy phức dương được bổ sung A, A'.

Biến đổi dây chuyền $F : X \longrightarrow X'$ làm cho biểu đồ

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & A' \end{array}$$

giao hoán thì F được gọi là *đồng cấu trên f*.

Định nghĩa đồng cấu trên f.

Cho A, A' là các vật trong phạm trù aben, đồng cấu $f : A \longrightarrow A'$ và X, X' tương ứng là các dãy phức dương được bổ sung A, A'.

Biến đổi dây chuyền $F : X \longrightarrow X'$ làm cho biểu đồ
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & A' \end{array}$$
giao hoán thì F được gọi là *đồng cấu trên f*.

Bổ đề 2 (Sự tồn tại duy nhất về đồng cấu trên f)

Cho đồng cấu $f : A \longrightarrow A'$ trong phạm trù aben.
X là dãy phức dương, xạ ảnh được bổ sung A,
X' là phép giải dương của A'.
Khi đó tồn tại duy nhất đồng cấu $F : X \longrightarrow X'$ trên f.

Bổ đề 3

Cho $0 \to A' \xrightarrow{\psi} A \xrightarrow{\varphi} A'' \longrightarrow 0$ khớp.
X' là phức dương xạ ảnh acrylic được bổ sung A'
X'' là phức dương xạ ảnh được bổ sung A''.
Khi đó tồn tại phức dương X được bổ sung A và đồng cấu Ψ, Φ tương ứng trên ψ, φ sao cho

$$0 \to X' \xrightarrow{\Psi} X \xrightarrow{\Phi} X'' \longrightarrow 0$$

khớp.

Bổ đề 4 (sự tồn tại của phép giải xạ ảnh)

Trong phạm trù aben có đủ xạ ảnh, với mỗi dãy khớp ngắn của các vật

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

luôn tồn tại phép giải xạ ảnh

$$0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0.$$

Bổ đề 4 (sự tồn tại của phép giải xạ ảnh)

Trong phạm trù aben có đủ xạ ảnh, với mỗi dãy khớp ngắn của các vật

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

luôn tồn tại phép giải xạ ảnh

$$0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0.$$

Bổ đề 5

Nếu A_1 là vật xạ ảnh và A_2 là vật nội xạ thì $t_i(A_1, A_2) = 0, i > 0$.

2.6 Hàm tử dẫn suất

Định lý 1

Cho $t : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \longrightarrow \mathcal{A}$ là hàm tử cộng tính trong các phạm trù aben, hiệp biến theo biến thứ nhất và phản biến theo biến thứ hai. Giả sử $\mathcal{A}_1$ có đủ xạ ảnh và $\mathcal{A}_2$ có đủ nội xạ.
Nếu $0 \longrightarrow A'_k \longrightarrow A_k \longrightarrow A''_k \longrightarrow 0 (k = 1, 2)$ là các dãy khớp trong $\mathcal{A}_k$ thì các dãy sau khớp

$$\ldots \longrightarrow t_2(A''_1, A_2) \longrightarrow t_1(A'_1, A_2) \longrightarrow t_1(A_1, A_2) \longrightarrow t_1(A''_1, A_2)$$

$$\longrightarrow t_0(A'_1, A_2) \longrightarrow t_0(A_1, A_2) \longrightarrow t_0(A''_1, A_2) \longrightarrow 0$$

và

$$\ldots \longrightarrow t_2(A_1, A'_2) \longrightarrow t_1(A_1, A''_2) \longrightarrow t_1(A_1, A_2) \longrightarrow t_1(A_1, A'_2)$$

$$\longrightarrow t_0(A_1, A''_2) \longrightarrow t_0(A_1, A_2) \longrightarrow t_0(A_1, A'_2) \longrightarrow 0$$

Phần 2: Công thức Kunneth

Định lý 2 (Đồng cấu α)

Nếu hàm tử $t : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \longrightarrow \mathcal{A}$ ở trên khớp phải thì tồn tại duy nhất đồng cấu

$$\alpha : t(H(X_1), H(X_2)) \longrightarrow Ht(X_1, X_2)$$

có bậc 0 để sơ đồ

$$t(Z(X_1), Z'(X_2)) \xrightarrow{\xi} t(H(X_1), H(X_2)) \tag{1}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow \tag{2}$$

$$Ht(X_1, X_2) \xrightarrow{\zeta} t(Z'(X_1), Z(X_2)) \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

giao hoán. Đồng cấu này có quan hệ tự nhiên với biến đổi dây chuyền $X_1 \longrightarrow X_1'$ và $X_2' \longrightarrow X_2$.

Nếu X_1, X_2 có các đồng cấu vi phân tầm thường thì α là đồng cấu đơn vị

Định lý 3

Cho dãy khớp ngắn $0 \longrightarrow X' \xrightarrow{\psi} X \xrightarrow{\varphi} X'' \longrightarrow 0$ của các phức trong phạm trù $\mathcal{A}_1$ và phức Y trong $\mathcal{A}_2$ sao cho dãy

$$0 \longrightarrow t(X', Y) \longrightarrow t(X, Y) \longrightarrow t(X'', Y) \longrightarrow 0$$

khớp. Lấy $\delta : H(X'') \longrightarrow H(X')$ và $\Delta : Ht(X'', Y) \longrightarrow Ht(X', Y)$ là các đồng cấu nối. Khi đó, nếu t là hàm tử khớp phải thì sơ đồ sau giao hoán

$$\begin{array}{ccc} t(H(X''), H(Y)) & \xrightarrow{t(\delta, id)} & t(H(X'), H(Y)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Ht(X'', Y) & \xrightarrow{\quad\Delta\quad} & Ht(X', Y) \end{array}$$

Định lý 4

Cho $t : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \longrightarrow \mathcal{A}$ là hàm tử cộng tính khớp phải, hiệp biến theo biến thứ nhất và phản biến theo biến thứ hai. X_1, X_2 lần lượt là các phức của $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$. Giả sử

$$0 \longrightarrow t(Z(X_1), X_2) \longrightarrow t(X_1, X_2)$$

khớp và đồng cấu

$$\alpha : t(B(X_1), H(X_2)) \longrightarrow Ht(B(X_1), X_2)$$

là toàn cấu. Khi đó dãy

$$\ldots \longrightarrow Ht(X_1, X_2) \xrightarrow{k_*} Ht(B(X_1), X_2) \xrightarrow{i_*} Ht(Z(X_1), X_2) \xrightarrow{j_*} Ht(X_1, X_2) \longrightarrow \ldots$$

được sinh bởi các đồng cấu tự nhiên

$$X_1 \xrightarrow{k} B(X_1) \xrightarrow{i} Z(X_1) \xrightarrow{j} X_1$$

là khớp.

Định lý 5 (Công thức Kunneth cho hàm tử khớp phải)

Cho $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ và $\mathcal{A}$ là các phạm trù aben và hàm tử cộng tính khớp phải $t : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \longrightarrow \mathcal{A}$ hiệp biến theo biến thứ nhất, phản biến theo biến thứ hai. Giả sử rằng $\mathcal{A}_1$ có đủ xạ ảnhï, $\mathcal{A}_2$ có đủ nội xạ và $\mathcal{A}$ có tổng trực tiếp. Cho X_1, X_2 lần lượt là các phức trong $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$.

1. Nếu các đồng cấu

$$\alpha_1 : t(B(X_1), H(X_2)) \longrightarrow Ht(B(X_1), X_2)$$

$$\alpha_2 : t(Z(X_1), H(X_2)) \longrightarrow Ht(Z(X_1), X_2)$$

là các đẳng cấu và nếu

$$t_1(B(X_1), X_2) = 0 = t_1(Z(X_1), H(X_2))$$

Khi đó tồn tại đồng cấu β có bậc -1 sao cho

$$0 \longrightarrow t(H(X_1), H(X_2)) \xrightarrow{\alpha} Ht(X_1, X_2) \xrightarrow{\beta} t_1(H(X_1), H(X_2)) \longrightarrow 0$$

khớp.

Định lý 5 (Công thức Kunneth cho hàm tử khớp phải)

Cho $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ và $\mathcal{A}$ là các phạm trù aben và hàm tử cộng tính khớp phải $t : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \longrightarrow \mathcal{A}$ hiệp biến theo biến thứ nhất, phản biến theo biến thứ hai. Giả sử rằng $\mathcal{A}_1$ có đủ xạ ảnhï, $\mathcal{A}_2$ có đủ nội xạ và $\mathcal{A}$ có tổng trực tiếp. Cho X_1, X_2 lần lượt là các phức trong $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$.

2. Nếu các đồng cấu

$$\alpha_1 : t(H(X_1), B'(X_2)) \longrightarrow Ht(X_1, B'(X_2))$$
$$\alpha_2 : t(H(X_1), Z'(X_2)) \longrightarrow Ht(X_1, Z'(X_2))$$

là các đẳng cấu và nếu

$$t_1(X_1, B'(X_2)) = 0 = t_1(H(X_1), Z'(X_2))$$

Khi đó tồn tại đồng cấu β có bậc -1 sao cho

$$0 \longrightarrow t(H(X_1), H(X_2)) \xrightarrow{\alpha} Ht(X_1, X_2) \xrightarrow{\beta} t_1(H(X_1), H(X_2)) \longrightarrow 0$$

khớp.

CÁM ƠN THẦY CÔ VÀ CÁC BẠN ĐÃ THEO DÕI!