BÀI TẬP CHƯƠNG 5. HÌNH HỌC VI PHÂN

Dạng 1: Tính độ cong

- Trường hợp 1: $(AB): y = y(x)$ Độ cong: $C = \dfrac{\left|y''_{xx}\right|}{\left[1+\left(y'_x\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$

- Trường hợp 2: $(AB): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ Độ cong: $C = \dfrac{\left|y''_{tt}.x'_t - x''_{tt}.y'_t\right|}{\left[\left(x'_t\right)^2+\left(y'_t\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$

- Trường hợp 3: $(AB): r = r(\varphi)$ Độ cong: $C = \dfrac{\left|r''_{\varphi\varphi}.r - 2.\left(r'_\varphi\right)^2 - r^2\right|}{\left[r^2+\left(r'_\varphi\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$

Dạng 2: Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong $(C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ **tại điểm** $t = t_0$

+ Phương trình tiếp tuyến: $\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)} = \dfrac{y-y_0}{y'(t_0)} = \dfrac{z-z_0}{z'(t_0)}$

+ Phương trình pháp diện:

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$$

Dạng 3: Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong $F(x,y,z)=0$ **tại điểm** $M_0(x_0;y_0;z_0)$

+ Phương trình pháp tuyến: $\dfrac{x-x_0}{F'_x(M_0)} = \dfrac{y-y_0}{F'_y(M_0)} = \dfrac{z-z_0}{F'_z(M_0)}$

+ Phương trình tiếp diện:

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0$$

BÀI TẬP

Bài 1: Tính độ cong của đường: $\begin{cases} x = e^t.\cos t \\ y = e^t.\sin t \end{cases}$, tại điểm ứng với t bất kỳ.

Công thức tính độ cong: $C = \dfrac{\left|y''_{tt}.x'_t - x''_{tt}.y'_t\right|}{\left[\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$

$$\begin{cases} x'_t = e^t.\cos t - e^t.\sin t = e^t\left(\cos t - \sin t\right) \\ y'_t = e^t.\sin t + e^t.\cos t = e^t\left(\sin t + \cos t\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x''_{tt} = e^t\left(\cos t - \sin t\right) + e^t\left(-\sin t - \cos t\right) = -2e^t.\sin t \\ y''_{tt} = e^t\left(\sin t + \cos t\right) + e^t\left(\cos t - \sin t\right) = 2e^t\cos t \end{cases}$$

$$C = \frac{\left|y''_{tt}.x'_t - x''_{tt}.y'_t\right|}{\left[\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\left|2e^t\cos t.e^t\left(\cos t - \sin t\right) + 2e^t.\sin t.e^t\left(\sin t + \cos t\right)\right|}{\left[\left(e^t\left(\cos t - \sin t\right)\right)^2 + \left(e^t\left(\sin t + \cos t\right)\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2.e^{2t}}{2e^{3t}\sqrt{2}} = \frac{1}{e^t\sqrt{2}}$$

Bài 2: Tính độ cong của $y = x^3 - 3x + 2$ tại $M\left(2;0\right)$

Công thức tính độ cong: $C = \dfrac{\left|y''_{xx}\right|}{\left[1 + \left(y'_x\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$

$$\begin{cases} y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y'\left(M\right) = 9 \\ y'' = 6x \qquad \Rightarrow y''\left(M\right) = 12 \end{cases}$$

$$C = \frac{\left|12\right|}{\left[1 + 9^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{12}{\sqrt{82^3}}$$

Bài 3: Tính độ cong của $r = a\left(1 + \cos\varphi\right)$; $a > 0$

Công thức tính độ cong: $C = \dfrac{\left|r''_{\varphi\varphi}.r - 2.\left(r'_\varphi\right)^2 - r^2\right|}{\left[r^2 + \left(r'_\varphi\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$

$$\begin{cases} r' = -a\sin\varphi \\ r'' = -a\cos\varphi \end{cases}$$

$$C=\frac{\left|r''_{\varphi\varphi}.r-2.\left(r'_{\varphi}\right)^2-r^2\right|}{\left[r^2+\left(r'_{\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left|-a^2.\cos\varphi\left(1+\cos\varphi\right)-2a^2\sin^2\varphi-a^2\left(1+\cos\varphi\right)^2\right|}{\left[a^2\left(1+\cos\varphi\right)^2+a^2\sin^2\varphi\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{\left|-a^2\cos\varphi-a^2\cos^2\varphi-2a^2\sin^2\varphi-a^2-2a^2\cos\varphi-a^2\cos^2\varphi\right|}{\left[a^2+2a^2\cos\varphi+a^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{\left|-2a^2\cos^2\varphi-2a^2\sin^2\varphi-a^2-3a^2\cos\varphi\right|}{\left[a^2+2a^2\cos\varphi+a^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{\left|-2a^2-a^2-3a^2\cos\varphi\right|}{\left[2a^2+2a^2\cos\varphi\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left|-3a^2\left(1+\cos\varphi\right)\right|}{\left[2a^2\left(1+\cos\varphi\right)\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{3a^2\left(1+\cos\varphi\right)}{\left[2a^2\left(1+\cos\varphi\right)\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{2a\sqrt{2}\left(1+\cos\varphi\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Bài 2: Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường: $x=2\sin t;\ y=2\cos t;\ z=t$ tại $A(0;-2;\ \pi)$.

Ứng với điểm $A(0;-2;\ \pi)$, ta có: $t=\pi$

$$\begin{cases}x'_t=2\cos t\\ y'_t=-2\sin t\\ z'_t=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'_t\left(t=\pi\right)=-2\\ y'_t\left(t=\pi\right)=0\\ z'_t\left(t=\pi\right)=1\end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến:

$$\frac{x-x_0}{x'\left(t_0\right)}=\frac{y-y_0}{y'\left(t_0\right)}=\frac{z-z_0}{z'\left(t_0\right)}\Leftrightarrow\frac{x-0}{-2}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-\pi}{1}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0+-2t\\ y=-2+0t\\ z=\pi+1t\end{cases}$$

Phương trình pháp diện: $-2\left(x-0\right)+0.\left(y+2\right)+1\left(z-\pi\right)=0\Leftrightarrow-2x+z-\pi=0$

Bài 3: Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong $\left(S\right):z^2=x^2+y^2$ tại điểm $M\left(3;\ 4;\ 5\right)$.

Đặt $F\left(x,y,z\right)=z^2-x^2-y^2$

$$\begin{cases}F'_x=-2x\Rightarrow F'_x\left(M\right)=-6\\ F'_y=-2y\Rightarrow F'_y\left(M\right)=-8\\ F'_z=2z\ \ \Rightarrow F'_z\left(M\right)=10\end{cases}$$

Phương trình pháp tuyến: $\dfrac{x-x_0}{F'_x\left(M_0\right)}=\dfrac{y-y_0}{F'_y\left(M_0\right)}=\dfrac{z-z_0}{F'_z\left(M_0\right)}\Leftrightarrow\dfrac{x-3}{-6}=\dfrac{y-4}{-8}=\dfrac{z-5}{10}$

Phương trình tiếp diện: $-6\left(x-3\right)-8\left(y-4\right)+10\left(z-5\right)=0\Leftrightarrow-6x-8y+10z=0$