BÀI TẬP CHƯƠNG 1. HÀM NHIỀU BIẾN

B. Đạo hàm và vi phân

Bài 1. Tính đạo hàm riêng và vi phân toàn phần của

(1) $z = f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

Giải:

$$z = f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

- Tính đạo hàm riêng

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \frac{1}{2}.\frac{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}.\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2.\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \frac{1}{2}.\frac{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)'_y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}.\frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{2.\sqrt{x^2+y^2}.\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)}$$

- Tính vi phân toàn phần

$$dz = z'_x.dx + z'_y.dy$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}.dx + \frac{y}{2.\sqrt{x^2+y^2}.\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)}.dy$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\left(dx + \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}.dy\right)$$

Bài 2: Đạo hàm của hàm hợp

(1) Cho $z = \ln\left(u^2+v^2\right);\ u = x.y;\ v = e^{x+y}$. Tính z'_x và z'_y.

Giải:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} = z'_u.u'_x + z'_v.v'_x$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y} = z'_u.u'_y + z'_v.v'_y$$

Ta có: $z'_u = \frac{2u}{u^2+v^2};\quad z'_v = \frac{2v}{u^2+v^2};\quad u'_x = y;\quad u'_y = x;\ v'_x = e^{x+y};\ v'_y = e^{x+y}$

$$
\begin{aligned}
z'_x &= z'_u.u'_x + z'_v.v'_x \\
&= \frac{2u}{u^2+v^2}.y + \frac{2v}{u^2+v^2}.e^{x+y} \\
&= \frac{2}{u^2+v^2}.\left(u.y + v.e^{x+y}\right) \\
&= \frac{2}{x^2y^2+e^{2(x+y)}}.\left[xy^2 + e^{2(x+y)}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z'_y &= z'_u.u'_y + z'_v.v'_y \\
&= \frac{2u}{u^2+v^2}.x + \frac{2v}{u^2+v^2}.e^{x+y} \\
&= \frac{2}{u^2+v^2}.\left(u.x + v.e^{x+y}\right) \\
&= \frac{2}{x^2y^2+e^{2(x+y)}}.\left[x^2y + e^{2(x+y)}\right]
\end{aligned}
$$

<u>Bài 5:</u> Tính *dz* biết *z=z(x, y)* là hàm ẩn xác định bởi:

(1) $\arctan z + z^2 = e^{xy}$

<u>Giải:</u>

$$dz = z'_x.dx + z'_y.dy$$

Ta có:

$$
\begin{aligned}
&\arctan z + z^2 = e^{xy} \\
\Leftrightarrow\ &\arctan z + z^2 - e^{xy} = 0
\end{aligned}
$$

Đặt $F(x,y,z) = \arctan z + z^2 - e^{xy}$

$$F'_x = -y.e^{xy};\ \ F'_x = -x.e^{xy};\ \ F'_z = \frac{1}{1+z^2} + 2z = \frac{1+2z+2z^3}{1+z^2}$$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{y.e^{xy}.\left(1+z^2\right)}{1+2z+2z^3};\ \ z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{x.e^{xy}.\left(1+z^2\right)}{1+2z+2z^3}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow dz &= z'_x.dx + z'_y.dy \\
&= \frac{y.e^{xy}.\left(1+z^2\right)}{1+2z+2z^3}.dx + \frac{x.e^{xy}.\left(1+z^2\right)}{1+2z+2z^3}.dy \\
&= \frac{e^{xy}.\left(1+z^2\right)}{1+2z+2z^3}.\left(y.dx + x.dy\right)
\end{aligned}
$$

Bài 7. Đạo hàm cấp cao

(3) Tính các đạo hàm riêng cấp 2 tại (0; 1) của hàm số:

$$f(x,y)=e^{2x+3y}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Giải:

- Đạo hàm riêng cấp 1:

$$f_x'=2.e^{2x+3y}-\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\quad;\quad f_y'=3.e^{2x+3y}-\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

- Đạo hàm riêng cấp 2:

$$f_{xx}''=\left(f_x'\right)_x'=\left[2.e^{2x+3y}-\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]_x'=4.e^{2x+3y}-\frac{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}-3x^2\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+y^2\right)^3}\Rightarrow f_{xx}''(0;1)=4e^3-1$$

$$f_{xy}''=\left(f_x'\right)_y'=\left[2.e^{2x+3y}-\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]_y'=6.e^{2x+3y}-x.\left[\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]_y'=6.e^{2x+3y}+\frac{3xy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{5}{2}}}\Rightarrow f_{xy}''(0;1)=6e^3$$

$$f_{yy}''=\left(f_y'\right)_y'=\left[3.e^{2x+3y}-\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]_y'=9.e^{2x+3y}-\frac{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}-3y^2\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+y^2\right)^3}\Rightarrow f_{yy}''(0;1)=9e^3+2$$

$$\text{Vậy}:\begin{cases}f_{xx}''(0;1)=4e^3-1\\ f_{xy}''(0;1)=6e^3\\ f_{yy}''(0;1)=9e^3+2\end{cases}$$

Bài 8: Tính d^2z biết:

(1) $z=x^2.\ln(x+y)$

Giải:

Ta có: $d^2z=z_{xx}''.dx^2+2.z_{xy}''.dxdy+z_{yy}''.dy^2$

- Đạo hàm riêng cấp 1:

$$z_x'=2x.\ln(x+y)+x^2.\frac{1}{x+y};\quad z_y'=x^2.\frac{1}{x+y}$$

- Đạo hàm riêng cấp 2:

$$z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x = \left[2x.\ln\left(x+y\right) + \frac{x^2}{x+y}\right]'_x$$

$$= 2.\ln\left(x+y\right) + \frac{2x}{x+y} + \frac{2x.\left(x+y\right) - x^2}{\left(x+y\right)^2}$$

$$= 2.\ln\left(x+y\right) + \frac{3x^2+4xy}{\left(x+y\right)^2}$$

$$z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y = \left[2x.\ln\left(x+y\right) + \frac{x^2}{x+y}\right]'_y$$

$$= \frac{2x}{x+y} - \frac{x^2}{\left(x+y\right)^2} = \frac{x^2+2xy}{\left(x+y\right)^2}$$

$$z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = \left[\frac{x^2}{x+y}\right]'_y = -\frac{x^2}{\left(x+y\right)^2}$$

Vậy

$$d^2z = z''_{xx}.dx^2 + 2.z''_{xy}.dxdy + z''_{yy}.dy^2$$

$$= \left[2.\ln\left(x+y\right) + \frac{3x^2+4xy}{\left(x+y\right)^2}\right].dx^2 + 2.\frac{x^2+2xy}{\left(x+y\right)^2}.dxdy - \frac{x^2}{\left(x+y\right)^2}.dy^2$$

C. Dùng vi phân tính gần đúng

$$\boxed{D = \sqrt{\left(1.04\right)^{1.99} + \ln\left(1.02\right)}}$$

<u>Giải:</u>

Đặt $f\left(x,y,z\right) = \sqrt{x^y + \ln z} = \left(x^y + \ln z\right)^{\frac{1}{2}}$

Ta có:

$$x_0 = 1;\quad y_0 = 2;\quad z_0 = 1$$
$$\Delta x = 0.04;\quad \Delta y = -0.01;\quad \Delta z = 0.02$$

$$D \approx f\left(x_0,y_0,z_0\right) + f'_x\left(x_0,y_0,z_0\right).\Delta x + f'_y\left(x_0,y_0,z_0\right).\Delta y + f'_z\left(x_0,y_0,z_0\right).\Delta z$$

$$f\left(x_0,y_0,z_0\right) = f\left(1;2;1\right) = 1$$

$$f_x' = \frac{1}{2}\left(x^y + \ln z\right)^{-\frac{1}{2}}.\left(x^y + \ln z\right)_x' = \frac{1}{2}\left(x^y + \ln z\right)^{-\frac{1}{2}}.y.x^{y-1} \Rightarrow f_x'(1;2;1) = 1$$

$$f_y' = \frac{1}{2}\left(x^y + \ln z\right)^{-\frac{1}{2}}.\left(x^y + \ln z\right)_y' = \frac{1}{2}\left(x^y + \ln z\right)^{-\frac{1}{2}}.x^y.\ln x \Rightarrow f_y'(1;2;1) = 0$$

$$f_z' = \frac{1}{2}\left(x^y + \ln z\right)^{-\frac{1}{2}}.\left(x^y + \ln z\right)_z' = \frac{1}{2}\left(x^y + \ln z\right)^{-\frac{1}{2}}.\frac{1}{z} \Rightarrow f_z'(1;2;1) = \frac{1}{2}$$

Vậy $D \approx 1 + 1 \times 0.04 + 0 \times (-0.01) + \frac{1}{2} \times 0.02 = 1.05$

D. Cực trị của hàm nhiều biến

<u>Bài 1:</u> Tìm cực trị của các hàm sau:

(2) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 15xy$

<u>Bước 1:</u> Tìm điểm dừng

Xét hệ:

$$\begin{cases} f_x' = 0 \\ f_y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 15y = 0 \\ 3y^2 - 15x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{5} \\ 3.\left(\frac{x^2}{5}\right)^2 - 15x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{5} \\ 3x.\left(\frac{x^3}{25} - 5\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{5} \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 5 \Rightarrow y = 5 \end{array}\right.$$

Hàm số có hai điểm dừng là: $M_1(0;0); M_2(5;5)$

<u>Bước 2:</u> $A = f''_{xx} = 6x;\ B = f''_{xy} - 15;\ C = f''_{yy} = 6y$

- Tại điểm $M_1(0;0): A = 0; B = -15; C = 0$

$\Rightarrow AC - B^2 < 0$

Vậy $M_1(0;0)$ không phải là cực trị của hàm số.

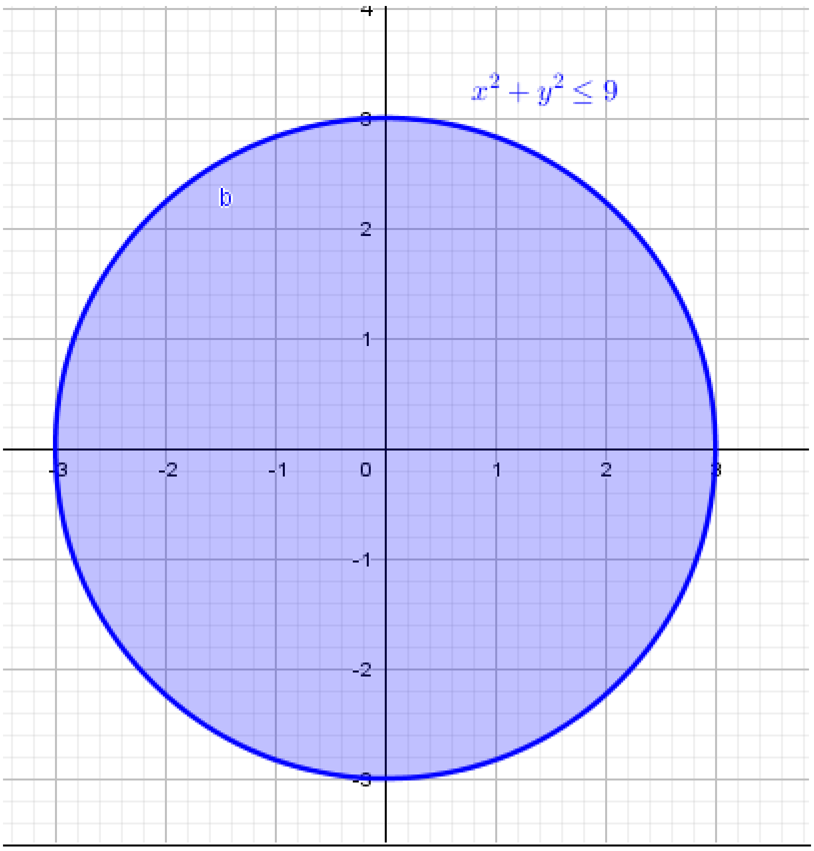
- Tại điểm $M_2(5;5):\ A = 30; B = -15; C = 30$

$$\Rightarrow \begin{cases} AC - B^2 > 0 \\ A > 0 \end{cases}$$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $M_2(5;5)$ và giá trị cực tiểu $f_{CT} = f(5;5) = -125$.

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

(2) $f(x,y) = x^2 - y^2$ trên miền $D = \{x^2 + y^2 \le 9\}$



Giải:

Bước 1: Tìm điểm dừng của hàm số *f(x, y)* trên miền D mở.

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (x,y) = (0;0) \in D$ là điểm dừng của hàm số *f(x, y)* và *f(0; 0)=0*

Bước 2: Tìm điểm dừng trên biên của miền D: $\partial D = \{x^2 + y^2 = 9\}$

Đặt $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 9 = 0$

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda.\varphi(x,y) = x^2 - y^2 + \lambda.(x^2 + y^2 - 9)$$

Xét hệ:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2x.\lambda = 0 \\ -2y + 2y.\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1+\lambda) = 0 \\ 2y(-1+\lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \lambda = -1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ \lambda = 1 \end{array}\right. \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = \pm 3 \\ y = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \end{array}\right.$$

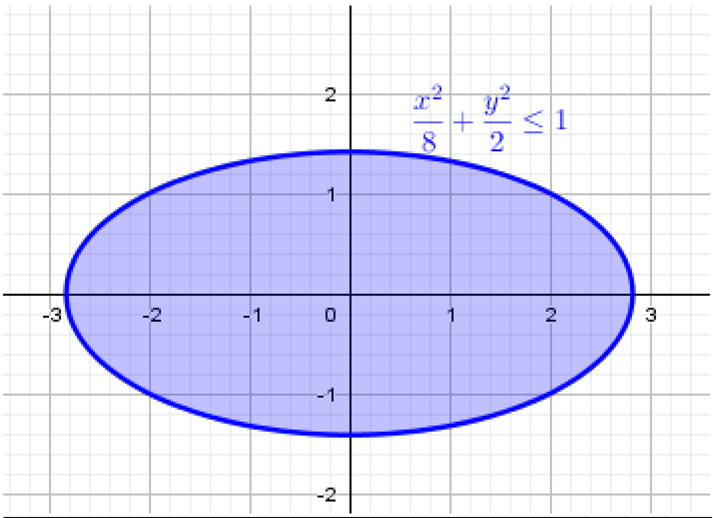
Hàm số có 4 điểm dừng: $M_1(0;\,3);\ M_2(0;\,-3);\ M_3(3;\ 0);\ M_4(-3;\,0)$

$\Rightarrow f(M_1) = f(M_2) = -9$ và $f(M_3) = f(M_4) = 9$

Vậy GTLN của *f* là: $f_{\max} = f(3;\,0) = f(-3;\,0) = 9$

và GTNN là $f_{\min} = f(0;\,3) = f(0;\,-3) = -9$

(3) $f(x,y) = xy$ trên miền $D = \left\{ \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} \le 1 \right\}$



<u>Giải:</u>

<u>Bước 1:</u> Tìm điểm dừng của hàm số *z* trên miền D mở

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (x,y) = (0;0) \in D$ là điểm dừng của hàm số *f(x, y)* và *f(0; 0)=0*

<u>Bước 2:</u> Tìm điểm dừng trên biên của miền D: $\partial D = \left\{ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \right\}$

Đặt $\varphi(x,y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda.\varphi(x,y) = xy + \lambda.\left(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 \right)$$

Xét hệ:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + \frac{\lambda x}{4} = 0 \\ x + \lambda y = 0 \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{\lambda x}{4} \\ y = -\frac{x}{\lambda} \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{\lambda x}{4} \\ y = -\frac{x}{\lambda} \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\lambda x}{4} = -\frac{x}{\lambda} \\ y = -\frac{x}{\lambda} \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 = 4 \\ y = -\frac{x}{\lambda} \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lambda = 2 \\ y = -\frac{x}{2} \\ \frac{x^2}{8} + \frac{x^2}{8} - 1 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \lambda = -2 \\ y = \frac{x}{2} \\ \frac{x^2}{8} + \frac{x^2}{8} - 1 = 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lambda = 2 \\ y = -\frac{x}{2} \\ x^2 = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} \lambda = 2 \\ y = \frac{x}{2} \\ x^2 = 4 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lambda = 2 \\ y = -\frac{x}{2} \\ x = \pm 2 \end{cases} \\ \begin{cases} \lambda = 2 \\ y = \frac{x}{2} \\ x = \pm 2 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2;\ y = -1 \\ x = -2;\ y = 1 \\ x = 2;\ y = 1 \\ x = -2;\ y = -1 \end{array} \right.$$

Hàm số có 4 điểm dừng: $M_1(2;\,-1);\ M_2(-2;\,1);\ M_3(2;\ 1);\ M_4(-2;\,-1)$

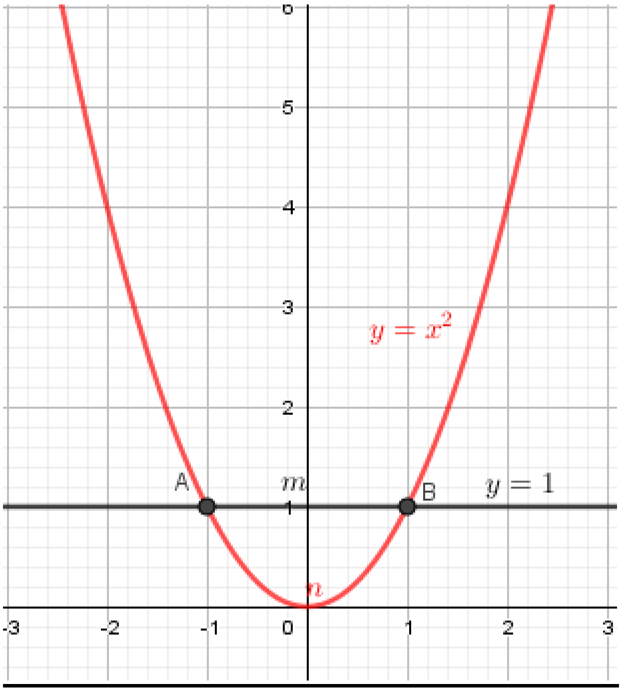
$\Rightarrow f(M_1) = f(M_2) = -2$ và $f(M_3) = f(M_4) = 2$

Vậy GTLN của *f* là: $f_{\max} = f(2;\,1) = f(-2;\,-1) = 2$

và GTNN là $f_{\min} = f(2;\,-1) = f(-2;\,1) = -2$

(4) $z = 1 + xy - x - y$ trên miền đóng D giới hạn bởi $y = x^2$ và và $y=1$.

Giải:



Bước 1: Tìm điểm dừng của hàm số z trên miền D mở

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow (x, y) = (1;1) \in D$ là điểm dừng của hàm số z và $z(1;\ 1) = 0$

Bước 2: Tìm điểm dừng trên biên của miền D.

$$AmB: \begin{cases} y = 1 \\ -1 \le x \le 1 \end{cases} \Rightarrow z = 1 + x - x - 1 = 0$$

$$AnB: \begin{cases} y = x^2 \\ -1 \le x \le 1 \end{cases} \Rightarrow z = 1 + x^3 - x - x^2$$

$$z' = 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \quad \Rightarrow z(1;\ 1) = 0 \\ x = \dfrac{-1}{3} \Rightarrow z(\dfrac{-1}{3}; \dfrac{1}{9}) = \dfrac{32}{27} \end{array} \right.$$

Vậy GTLN của f là: $f_{\max} = \dfrac{32}{27}$ và GTNN là $f_{\min} = 0$